MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX–a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

Suma a trei numere este 100.Ştiind că primul număr este 40% din al doilea iar al treilea număr este 150% din primul număr, determinați cele trei numere.

SOLUȚIE:

Dacă a,b,c sunt cele trei numere, atunci putem scrie: $a+b+c=100$, $a=\frac{2}{5}b, c=\frac{3}{5}b$ 2p

Obţine $\frac{2b}{5}+b+\frac{3b}{5}=100$ 2p

Finalizare $b=50,\ a=20,\ c=30$ 3p

Problema 2.

a) Fie D mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$.

b) Folosind, eventual, punctul anterior, să se demonstreze că $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

SOLUȚIE:

a)

$\begin{cases}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\end{cases}$ 1p

Rezultă: $2\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD})\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$ 2p

SAU

Dacă A' este simetricul punctului A față de punctul D, atunci conform regulii paralelogramului

$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 2p

Obţine $\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AA'}}{2}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$ 1p

b) Deoarece G este centrul de greutate al ΔABC, rezultă că $\overrightarrow{GA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ 2p

Atunci $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}$ 2p

Problema 3.

Pe dreapta (d) se iau în ordine punctele $M, M_0, M_1, ..., M_n$, astfel încât $MM_0 = 1\text{cm}, M_0M_1 = 3\,\text{cm}, M_1M_2 = 3^2\,\text{cm}$, etc. (fiecare segment este de trei ori mai mare decât segmentul dinaintea lui).Să se determine lungimea segmentului MM_{2018}).

SOLUȚIE:

Obţine $M_2M_3 = 3^3\,\text{cm}, ..., M_{2017}M_{2018} = 3^{2018}\,\text{cm}$.. 2p

Obţine $MM_{2018} = MM_0 + M_0M_1 + ... + M_{2017}M_{2018} = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{2018}\,\text{cm}$.. 2p

Finalizare. $MM_{2018} = \dfrac{3^{2019} - 1}{2}\,\text{cm}$.. 3p

Problema 4.

Fie $a_n = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + ... + \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $a_8 = \dfrac{2}{3}$.

b) Demonstrați că $a_n > 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

c) Determinaţi $n \le 15$ astfel încât $a_n \in \mathbb{Q}$.

SOLUȚIE:

a) $a_8 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + ... + \dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{8}} - \dfrac{1}{\sqrt{9}} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ 2p

b) $a_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ 1p

Deoarece $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, rezultă că $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, deci $-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ şi $a_n > 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 2p

c) $a_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n+1$ este pătrat perfect.. 1p

Deoarece $n \le 15$, $n \in \mathbb{N}^*, n+1 =$ pătrat perfect, rezultă că $n \in \{3, 8, 15\}$ 1p

Notă. ***Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.***

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X–a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

a) Verificaţi egalitatea $z\cdot\overline{z}=|z|^2,\ (\forall)z\in\mathbb{C}$.

b) Determinaţi $k>0$ astfel încât $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=k\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right),\ (\forall)z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

c) Dacă $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z_1|=1, |z_2|=1$ şi $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$, să se determine $|z_1-z_2|$.

SOLUȚIE:

a) Dacă $z=a+b\cdot i$, atunci $\overline{z}=a-b\cdot i, |z|=\sqrt{a^2+b^2}$ şi se obţine imediat că $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ 2p

b) Obţine $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=|z_1|^2-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+|z_2|^2$

şi $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)=|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+|z_2|^2$ 2p

Finalizare $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$, deci $k=2$ 1p

c) Folosind relaţia anterioară obţine $|z_1-z_2|^2+3=4\Rightarrow|z_1-z_2|=1$ 2p

Problema 2.

Pentru $x>1$, notăm cu $S_n(x)=x^{-1}+x^{-2}+...+x^{-n},\ n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi $(1-x)\cdot S_n(x)$.

b) Deduceţi $x^{-1}+x^{-2}+...+x^{-n}=\dfrac{x^n-1}{x^n(x-1)},(\forall)x>1$.

c) Folosind, eventual, punctul anterior, să se demonstreze că $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot...\cdot\sqrt[2^n]{3}<3,\ (\forall)n\geq1$.

SOLUȚIE:

a) Obţine $(1-x)\cdot S_n(x)=(1-x)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+..+\dfrac{1}{x^n}\right)=\dfrac{1}{x^n}-1$ 2p

b) Din relaţia anterioară deduce $S_n(x)=\dfrac{1-x^n}{x^n(1-x)}\Leftrightarrow x^{-1}+x^{-2}+...+x^{-n}=\dfrac{x^n-1}{x^n(x-1)},(\forall)x>1$ 2p

c) Folosind $\sqrt[k]{3}=3^{\frac{1}{k}}$ se obţine $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot...\cdot\sqrt[2^n]{3}=3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{4}}\cdot...\cdot3^{\frac{1}{2^n}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}$ 1p

Din relaţia de la pct. b) se obţine $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{2^n-1}{2^n}$ 1p

Finalizare. Deoarece $\frac{2^n-1}{2^n}<1 \Rightarrow \sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{3}<3,\ (\forall)n\geq 1$ 1p

Problema 3.

Avem la dispoziție un număr nelimitat de jetoane pe care sunt scrise numerele 5, 7 sau 11. Un număr $n\in\mathbb{N}^*$ se numește „norocos” dacă găsim un număr de jetoane astfel încât suma numerelor scrise pe ele să fie egal cu n.

a) Demonstrați că numărul 13 nu este „norocos”.

b) Demonstrați că numerele: 14, 15, 16 și 18 sunt „norocoase”.

c) Demonstrați că orice număr natural $n\geq 14$ este „norocos”.

SOLUȚIE:

a) Fie x, y, z numărul jetoanelor pe care sunt scrise numerele 5, 7, respective 11 .... 1p

$5x+7y+11z\neq 13, (\forall)x,y,z\in\mathbb{N}\Rightarrow 13$nu este număr „norocos” 1p

b) $14=2\cdot 7;\ 15=3\cdot 5,;16=1\cdot 5+1\cdot 11;17=2\cdot 5+1\cdot 7;18=1\cdot 7+1\cdot 11.$

Rezultă că numerele 14, 15, 16, 17, 18 sunt numere „norocoase” 2p

c)14 – „norocos”⇒ 19 – „norocos”$(19=1\cdot 5+2\cdot 7)$

15 – „norocos”⇒ 20 – „norocos”$(20=4\cdot 5)$

16 – „norocos”⇒ 21 – „norocos”$(21=3\cdot 7)$ 2p

17 – „norocos”⇒ 22 – „norocos”$(22=3\cdot 5+1\cdot 7)$

18 – „norocos”⇒ 23 – „norocos”$(23=1\cdot 5+1\cdot 7+1\cdot 11)$

Așadar, dacă n este „norocos”, rezultă că și $(n+5)$ este „norocos”.

Fie $n=5\alpha_1+7\alpha_2+11\alpha_3, n\geq 14$. Analizăm următoarele cazuri:

I. $n=5k\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0$, n este număr „norocos”.

II. $n=5k+1\Rightarrow\alpha_2=0,\alpha_3=1$, iar $n=5\alpha_1+11=5k+1\Rightarrow n$ este număr „norocos”.

III. $n=5k+2\Rightarrow\alpha_2=1,\alpha_3=0$, iar $n=5\alpha_1+7=5k+2\Rightarrow n$ estenumăr „norocos”.

IV. $n=5k+3\Rightarrow\alpha_2=\alpha_3=1$, iar $n=5\alpha_1+18=5k+3\Rightarrow n$ este număr „norocos”.

V. $n=5k+4\Rightarrow\alpha_2=2,\alpha_3=0$, iar $n=5\alpha_1+14=5k+4\Rightarrow n$ este număr „norocos” 1p

Problema 4.

La un concurs de atletism participă liceele A, B, C, fiecare liceu cu câte 3 elevi. Punctajul final al fiecărui liceu se calculează adunând punctele obținute de elevii liceului respectiv. Elevul sosit pe locul $k(k=\overline{1,9})$ i se acordă $\frac{10}{k}$ puncte.

Juriul concursului a constatat următoarele condiții îndeplinite simultan:

i. Oricare doi elevi nu au sosit în același timp.

ii. Primele trei locuri au fost ocupate de elevi de la licee diferite.

iii. Elevii liceului C au sosit unul după altul.

iv. Fiecare elev de la liceul B avea chiar în fața sa un elev de la liceul A.

Care este clasamentul final al celor trei licee în funcție de punctajul obținut de fiecare dintre ele?

SOLUȚIE:

Din ii) și iii), rezultă că elevii liceului C au ocupat locurile 3, 4 și 5 .... 1p

Elevii vor fi distribuiți după tabelul

Locul	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Elev de liceul	A	B	C	C	C	A	B	A	B

.... 1p

Din ii) și iv) rezultă că locul 1 va fi ocupat de un elev de la liceul A, iar locul 2 va fi ocupat de un elev de la liceul B 1p

Din iv), rezultă că locurile 6 și 8 au fost ocupate de elevi de la liceul A, iar locurile 7 și 9 au fost ocupate de elevi de la liceul B 1p

Liceul A: $10+\frac{10}{6}+\frac{10}{8}=\frac{310}{24}\cong 12{,}9$ puncte 1p

Liceul B: $\frac{10}{2}+\frac{10}{7}+\frac{10}{9}=\frac{950}{126}\cong 7{,}5$ puncte 1p

Liceul C: $\frac{10}{3}+\frac{10}{4}+\frac{10}{5}=\frac{470}{60}\cong 7{,}8$ puncte 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI–a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

a) Calculați $l=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+9}{x^2+5x+3}\right)^x$.

b) Determinați $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+3}-\sqrt{3x^2+x+5}-mx-n\right)=0$.

SOLUȚIE:

a) Suntem în cazul de nedeterminare (excepție) 1^∞.

$l=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+9}{x^2+5x+3}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3x+6}{x^2+5x+3}\right)^x$ 1p

$l=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3x+6}{x^2+5x+3}\right)^{\frac{x^2+5x+3}{-3x+6}}\right]^{\frac{-3x^2+6x}{x^2+5x+3}}=\frac{1}{e^3}$ 1p

b) $\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}-m-\frac{n}{x}\right)=0$ 1p

$\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}-m-\frac{n}{x}\right)=0$. Limita este finită dacă $\sqrt{2}-\sqrt{3}-m=0\Rightarrow m=\sqrt{2}-\sqrt{3}$ 1p

Cu m astfel determinat, avem: $\lim_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{2x^2+x+3}-\sqrt{2}\cdot x\right)+\left(\sqrt{3}\cdot x-\sqrt{3x^2+x+5}\right)-n\right]=0$ 1p

Rezultă: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2x^2+x+3}+\sqrt{2}\cdot x}-\frac{x+5}{\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{3x^2+x+5}}-n\right)=0$ 1p

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2x^2+x+3}+\sqrt{2}\cdot x}-\frac{x+5}{\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{3x^2+x+5}}-n\right)=0$ 1p

Obținem $n=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}$ 1p

Problema 2.

Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

a) Calculați A^2 și $\det(A)$.

b) Dacă $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ și $\det(X)=0$, demonstrați că $X^2=(a+d)\cdot X$.

c) Rezolvați ecuația $X^{2018}=A$.

SOLUȚIE:

a) $A^2=\begin{pmatrix}16 & 24\\ 32 & 48\end{pmatrix}$ 1p

$\det(A)=0$ 1p

b) $\det(X)=ad-bx=0\Rightarrow ad=bc$

$X^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}$ 1p

$(a+d)\cdot X=\begin{pmatrix}a^2+ad & ab+bd\\ ac+cd & ad+d^2\end{pmatrix}$ 1p

Cum $ad=bc\Rightarrow X^2=(a+d)\cdot X$,

Din $X^2=(a+d)\cdot X\Rightarrow X^4=(a+d)^3\cdot X;X^8=(a+d)^7\cdot X;X^{2018}=(a+d)^{2017}\cdot X$ 1p

Ecuația devine $(a+d)^{2017}\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a\cdot(a+d)^{2017}=2\\ b\cdot(a+d)^{2017}=3\\ c\cdot(a+d)^{2017}=4\\ d\cdot(a+d)^{2017}=6\end{cases}\Rightarrow a+d=\pm\sqrt[2018]{8}$ 1p

$X=\frac{\pm 1}{\sqrt[2018]{8^{2017}}}\cdot A$ 1p

Problema 3.

Să se rezolve ecuația $\Delta(x)=0$, unde:

$\Delta(x)=\begin{vmatrix}x^2 & x^4 & 16\\ x^2+1 & x^4+1 & 17\\ x^2+x & x^4+x^2 & 20\end{vmatrix}$. (Se vor folosi proprietățile determinanților)

SOLUȚIE:

$\Delta(x)\underset{L_3-L_1}{\overset{L_2-L_1}{=}}\begin{vmatrix}x^2 & x^4 & 16\\ 1 & 1 & 1\\ x & x^2 & 4\end{vmatrix}$ 1p

$\Delta(x)\underset{C_3-C_1}{\overset{C_2-C_1}{=}}\begin{vmatrix}x^2 & x^4-x^2 & 16-x^2\\ 1 & 0 & 0\\ x & x^2-x & 4-x\end{vmatrix}$ 2p

$\Delta(x)=-\begin{vmatrix}x^4-x^2 & 16-x^2\\ x^2-x & 4-x\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}x^2(x-1)(x+1) & (4-x)(4+x)\\ x(x-1) & 4-x\end{vmatrix}$ 1p

$\Delta(x)=x(x-1))x-4)\begin{vmatrix} x(x+1) & 4+x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ 1p

$\Delta(x)=x(x-1)(x-4)\begin{vmatrix} x(x+1) & 4+x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ 1p

$\Delta(x)=x(x-1)(x-4)\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow x\in\{-2,0,1,2,4\}$. 1p

Problema 4.

Doi prieteni, Cristian și Andrei, măsoară fiecare distanța de acasă până la școală. Distanța măsurată de Cristian este egală cu x km, iar cea măsurată de Andrei este egală cu y km. Știind că exisă $a,b,c\in\{1,2,3\}$, nu neapărat distincte, astfel încât să fie verificat sistemul: $\begin{cases} x+2y=4 \\ ax+y=5 \\ cx+3y=b+6 \end{cases}$, determinați a,b,c și distanțele x și y.

SOLUȚIE:

Dacă $a=1 \Rightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-1, \end{cases}$ dar y este o distanță, deci nu poate fi număr negativ.. 1p

Dacă $a=2 \Rightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 1p

Rezultă $2c+3=b+6$ 1p

Obținem $\begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} b=3 \\ c=3 \end{cases}$ 1p

Dacă $a=3 \Rightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ 3x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{6}{5} \\ y=\frac{7}{5} \end{cases}$ 1p

Rezultă $6c=5b+9$ (imposibil).. 1p

Așadar, $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=2 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=3 \\ x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 1p

<u>Notă.</u> Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII–a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases} x^2+ax+1; x\le 1 \\ x^3+x^2-4x+b; x>1 \end{cases}$ să fie o primitivă pentru o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f=f(x)$. Determinați apoi funcția f.

SOLUȚIE:

Funcția F este o primitivă a funcției f dacă și numai dacă F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=f(x), (\forall)x\in\mathbb{R}$ 1p

F este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Rezultă că F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă F este derivabilă în $x_0=1$ 1p

Ca F să fie derivabilă în $x_0=1$ este necesar ca F să fie continuă în $x_0=1$, ceea ce impune ca $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}F(x)=F(1)\Rightarrow b=a+4$ 1p

F este derivabilă în $x_0=1$ dacă $F_s'(1)=F_d'(1)$ 1p

Cum $F'(x)=\begin{cases} 2x+a; x\le1 \\ 3x^2+2x-4; x>1 \end{cases}$, egalitatea de mai sus conduce la $2+a=1\Rightarrow a=-1$. Obținem $b=3$ 1p

$F(x)=\begin{cases} x^2-x+1; x\le1 \\ x^3+x^2-4x+3; x>1 \end{cases} \Rightarrow F'(x)=\begin{cases} 2x-1; x\le1 \\ 3x^2+2x-4; x>1 \end{cases}$ 1p

Deducem că $f(x)=\begin{cases} 2x-1; x\le1 \\ 3x^2+2x-4; x>1 \end{cases}$ 1p

Problema 2.

Calculați $I(x)=\int \frac{x\cdot e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx, x\in(-1,1)$.

SOLUȚIE:

Integrăm prin părți, alegând: $\begin{cases} f(x)=e^{\arcsin x} \\ g'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} \\ g(x)=-\sqrt{1-x^2} \end{cases}$ 2p

$I(x)=-\sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arcsin x}+\int e^{\arcsin x}dx$ 1p

În integrala din membrul al doilea mai integrăm odată prin părți, alegând: $\begin{cases} f(x)=e^{\arcsin x} \\ g'(x)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=\dfrac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} \\ g(x)=x \end{cases}$ 2p

Rezultă: $I(x)=-\sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arcsin x}+x\cdot e^{\arcsin x}-I(x)$ 1p

$I(x)=\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\cdot e^{\arcsin x}+C$ 1p

Problema 3.

Considerăm mulțimea $G=\left\{A(x)\in M_3(\mathbb{R}),\ A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2x^2+3x & 2x & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

a) Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$.

b) Demonstrați că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

c) Demonstrați că grupul $(\mathbb{R},+)$ este izomorf cu grupul $(G,\cdot)$.

d) Calculați $\left(A(x)\right)^{2018}$.

SOLUȚIE:

a) Se verifică prin calcul direct........ 1p

b) Din a) justifică comutativitatea și asociativitatea 1p

$A(0)=I_3$ este elementul neutru

$A^{-1}(x)=A(-x)$ este elementul simetric........ 1p

c) Definim $f:\mathbb{R}\to G,$ prin $f(x)=A(x)$ 1p

Funcția *f* este bijectivă

$f(x+y)=A(x+y)=A(x)\cdot A(y)=f(x)\cdot f(y)\Rightarrow f$ izomorfism........ 1p

d) $\left(A(x)\right)^{2018}=\underbrace{A(x)\cdot A(x)\cdot\ldots\cdot A(x)}_{2018\text{ ori}}=A(2018x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4036x & 1 & 0 \\ 2\cdot 2018^2\cdot x^2+3\cdot 2018x & 4036x & 1 \end{pmatrix}$ 2p

Problema 4.

Fie M o mulțime nevidă și „$*$" o lege de compoziție pe M. Spunem că elementul $d\in M$ este „*destroyer*" pentru operația „$*$" dacă $d*x=x*d=d,(\forall),x\in M$. Pentru $a,b\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ fixate, definim pe $\mathbb{R}$ operația „$*$" prin $x*y=bxy+abx+aby+a^2b-a,(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

a) Demonstrați că operația „$*$" este asociativă și admite element „*destroyer*".

b) Demonstrați că $E=(-2018a)*(-2017a)*\ldots*(-a)*0*a*\ldots*(2017a)*(2018a)<0$.

SOLUȚIE:

a) $(x*y)*z=x*(y*z)=b^2xyz+ab^2(xy+xz+yz)+a^2b^2(x+y+z)+a^3b^2-a$ 2p

$d*x=d,(\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow bx(a+d)+abd+a^2b-a=d,(\forall)x\in\mathbb{R}$ 1p

Pentru $x=0\Rightarrow(ab-1)(d+a)=0\Rightarrow d=-a$ 1p

Verificare $x*(-a)=-a,(\forall)x\in\mathbb{R}$ 1p

b) Obținem $E=-a<0$ 2p

<u>Notă.</u> Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.